انتـگرال

تعریف: فرض کنید برای هر $x \in I$ ، رابطه‌ی $F'(x) = f(x)$ برقرار باشد، در این صورت تابع F را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع f روی بازه‌ی I می‌گوئیم و آن را با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهیم.

ویژگی‌های انتگرال نامعین

1) $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + c \Rightarrow \int f(t)dt = F(t) + c , \ldots$

2) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad , \quad (k \in R)$

3) $\int (f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4) $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$

فرمول‌های انتگرال نامعین

1) $\int dx = x + c$

2) $\int kdx = kx + c \qquad k \in R$

3) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad ; \quad (n \neq -1)$

4) $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$

5) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$

6) $\int sinx\, dx = -cosx + c$

7) $\int sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}cos(ax+b) + c$

8) $\int cosx\, dx = sinx + c$

9) $\int cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}sin(ax+b) + c$

10) $\int (1 + tan^2x)\, dx = tanx + c$

11) $\int (1 + tan^2(ax+b))\, dx = \frac{1}{a}tan(ax+b) + c$

12) $\int (1 + cot^2x)\, dx = -cotx + c$

13) $\int (1 + cot^2(ax+b))\, dx = -\frac{1}{a}cot(ax+b) + c$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}x + c$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad a > 0$

16) $\int \frac{dx}{1-x^2} = tan^{-1}x + c$

17) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad a > 0$

18) $\int \frac{1}{x}\, dx = Ln|x| + c$

19) $\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a}Ln|ax+b| + c$

$$20) \int tanx\ dx = -Ln|cos\ x| + c$$

$$21) \int tan(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a}Ln|cos\ (ax+b)| + c$$

$$22) \int e^x\ dx = e^x + c$$

$$23) \int e^{ax+b}\ dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

$$24) \int cotx\ dx = Ln|sin\ x| + c$$

$$25) \int cot(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}Ln|sin(ax+b)| + c$$

انتگرال

تست) اگر $\int \frac{3x}{\sqrt{x-1}}\ dx = f(x)\sqrt{x-1} + c$ باشد، $f(x)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۸۷)

۱) $2x+1$ ۲) $2x+2$ ۳) $2x+3$ ۴) $2x+4$

پاسخ:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x-1}}\ dx = 3\int (\frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}})\ dx = 3\int (\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}})\ dx$$

$$= \int \sqrt{x-1}\ dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\ dx = 3 \times \frac{2}{3}\ (x-1)^{\frac{3}{2}} + 3 \times 2\sqrt{x-1} + c$$

$$= 2(x-1)\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} + c = \sqrt{x-1}\ (2x-2+6) + c$$

$$= \sqrt{x-1}\ (2x+4) + c \implies f(x) = 4$$

نکته: در تست‌هایی به فرم بالا از طرف شامل انتگرال، انتگرال گرفته و پس از بدست آوردن حاصل انتگرال و فاکتورگیری مناسب $f(x)$ را می‌یابیم.

قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ی I که شامل نقطه‌ی a است پیوسته باشد، در این صورت احکام ذیل برقرارند:

الف) هر گاه تابع F را بر I با ضابطه‌ی $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ تعریف کنیم آنگاه تابع F مشتق‌پذیر است و $F'(x) = f(x)$، یعنی F یک تابع اولیه‌ی f می‌باشد به عبارت دیگر

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\ dt\right) = f(x)$$

ب) هر گاه G تابع اولیه‌ی دیگری برای x باشد، به طوری که $G'(x) = f(x)$، آن‌گاه برای هر دو نقطه از I مانند a , b، $(a < b)$

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a)$$

تست حاصل $\int_0^4 \left[\frac{x}{2}\right] \frac{\sqrt{x}-1}{x}\ dx$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $4 - 2\sqrt{2} - Ln2$

۲) $4 - 2\sqrt{2} + Ln2$

۳) $2 + 2\sqrt{2} - Ln2$

۴) $2 - 2\sqrt{2} + Ln2$

پاسخ:

$$0 \le x \le 4 \Rightarrow 0 \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow 0 \le x \le 2 \\ 1 \le \frac{x}{2} \le 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 \left[\frac{x}{2}\right] \frac{\sqrt{x}-1}{x}\ dx = \int_0^2 0\ dx + \int_2^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x}\ dx = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx - \int_2^4 \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx - Ln|x|\,\Big|_2^4 = 2\sqrt{x}\,\Big|_2^4 - Ln|x|\,\Big|_2^4 = 4 - 2\sqrt{2} - (Ln4 - Ln2)$$

$$= 4 - 2\sqrt{2} - Ln\frac{4}{2} = 4 - 2\sqrt{2} - Ln2$$

تست) اگر $G(x) = x^2 \int_2^{\sqrt{x}} \frac{Ln(t+2)}{t^2}$ باشد $G'(4)$ چند برابر $Ln2$ است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ:

$$G'(x) = 2x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{Ln(t+2)}{t^2} + x^2\left(\frac{Ln\,\sqrt{x}+2}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$G'(4) = 2 \times 4 \int_2^{\sqrt{4}=2} \frac{Ln(t+2)}{t^2} + 4^2 \times \frac{1}{2\sqrt{4}}\ \frac{Ln\,\sqrt{4}+2}{4} = 16 \times \frac{1}{4} \times \frac{Ln4}{4}$$

$$= Ln4 = Ln2^2 = 2Ln2$$

نکته: چون ناحیه‌ی محدد به نمودار تابع f و محور x ها از $x = a$ تا $x = a$ یک خط می‌باشد و هیچ مساحتی ندارد پس:

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

نکته: در حالت کلی اگر تابع f بر بازه‌ی I شامل نقطه‌ی a پیوسته و توابع h , g در این بازه مشتق‌پذیر باشند داریم:

$$1)\ F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt \ \Rightarrow\ F'(x) = g'(x)f(g(x))$$

$$2)\ F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt \ \Rightarrow\ F'(x) = g'(x)f\big(g(x)\big) - h'(x)f(h(x))$$

تست) میانگین تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ بر بازه‌ی $[1,3]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۳)

۱) $2-Ln3$ ۲) $3-Ln2$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ:

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx \Rightarrow \overline{f}=\frac{1}{3-1}\int_1^3\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$

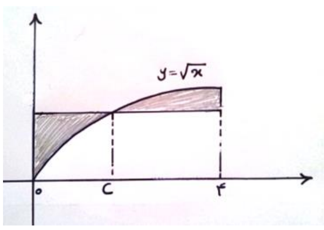
$$\Rightarrow \overline{f}=\frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx-\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x^2\Big|_1^3-\frac{1}{2}\,Ln|x|\,\Big|_1^3$$

$$=\frac{1}{4}(9-1)-\frac{1}{2}\,(Ln3-Ln1)=2-\frac{1}{2}\,Ln3=2-Ln\sqrt{3}$$

نکته: مقدار متوسط یا میانگین تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ را با $\overline{f}$ نشان می‌دهیم و از رابطه‌ی زیر به-دست می‌آوریم.

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

تست) در شکل روبه‌رو مساحت دو ناحیه‌ی سایه‌زده برابرند c کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)



۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{16}{9}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{9}{4}$

پاسخ:

چون مساحت دو ناحیه‌ی مشخص شده در شکل برابرند پس در واقع داریم:

$$f(c)=\frac{1}{4}\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^4=\frac{2}{12}\times 4\sqrt{4}-0=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{c}=\frac{4}{3} \Rightarrow c=\frac{16}{9}$$

✍ **سوال:** حاصل انتگرال $\int sin4x\ cos2x\ dx$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا حاصل ضرب را به حاصل جمع تبدیل می‌نمائیم.

$$sina\ cosb=\frac{1}{2}(sin(a+b)+sin(a-b))$$

$$\Rightarrow \int sin4x\ cos2x\ dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(sin6x+sin2x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}cox6x\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)cos2x+c$$

$$=-\frac{1}{12}cos6x-\frac{1}{4}cos2x+c$$

✍ **نکته:** برای محاسبه انتگرال‌هایی نظیر $\int sinax\ cosbx\ dx$, $\int sinax\ sinbx\ dx$, $\int cosax\ cosbx\ dx$

ابتدا عبارت جلوی انتگرال‌ها را به حاصل‌جمع تبدیل کرده و سپس آنها را محاسبه می‌کنیم.

✍ **سوال:** انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int sin^4x\ dx$ ب) $\int cos^2x\ dx$

پاسخ:

$$\int sin^4x\ dx=\int(sin^2x)^2\ dx=\int(\frac{1-cos2x}{2})^2\ dx=\frac{1}{4}\int(1-cos2x)^2\ dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2cos2x+cos^22x)\ dx=\frac{1}{4}\int(1-2cos2x+(\frac{1+cos4x}{2}))\ dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2cos2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos4x)\ dx=\frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}-2cos2x+\frac{1}{2}cos4x)\ dx$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}sin4x+c=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{32}sin4x+c$$

ب) $\int cos^2x\,dx=\int(\frac{1+cos2x}{2})\,dx=\frac{1}{2}\int(1+cos2x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}sin2x+c=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin2x+c$$

انتگـــرال

نکته: برای محاسبه‌ی انتگرال‌های $\int sin^{2n}ax\,dx$, $\int cos^{2n}ax\,dx$ که در آن $n\in N$ ، ابتدا به کمک فرمول‌های طلایی $sin^2\alpha=\frac{1-cos2\alpha}{2}$, $cos^2\alpha=\frac{1+cos2\alpha}{2}$ ، انتگرال را به یک انتگرال مقدماتی تبدیل نموده و سپس آنها را محاسبه می‌کنیم.

سوال: حاصل $\int_{-3}^{3}\frac{(x+2)^2}{x^2+4}\,dx$ را به دست آورید.

تابع $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+4}$ را ساده‌تر می‌نمائیم:

$$f(x)=\frac{(x^2+4)+4x}{x^2+4}=1+\frac{4x}{x^2+4}\quad\Rightarrow g(x)$$

تابع $g(x)=\frac{4x}{x^2+4}$ ، تابعی فرد است. پس این تابع روی بازه‌ی [-3,3] انتگرالش صفر است.

$$\int_{-3}^{3}\frac{(x+2)^2}{x^2+4}=\int_{-3}^{3}(1+\frac{4x}{x^2+4})\,dx=\int_{-3}^{3}1\,dx+\int_{-3}^{3}\frac{4x}{x^2+4}\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3}1\,dx=x\Big|_{-3}^{3}=\big(3-(-2)\big)=6$$

نکته: اگر f روی بازه‌ی [-a,a] تابعی فرد و انتگرال پذیر باشد آن گاه:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$$

پاسخ: اگر $f(x) = cos(\frac{\pi}{3}x)$ ، تابع $f(x)$ تابعی زوج است پس داریم:

$$\int_{-3}^{2} cos(\frac{\pi}{3}x)$$

$$= 2\int_{0}^{2} cos\frac{\pi}{3}x = 2 \times \frac{1}{\frac{\pi}{3}} sin(\frac{\pi}{3}x)\Big|_0^2 = \frac{\pi}{6} sin(\frac{\pi}{3}x)\Big|_0^2$$

$$= \frac{6}{\pi}(sin\frac{2\pi}{3} - sin0) = \frac{6}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

نکته: اگر f روی بازه‌ی $[-a,a]$ تابعی زوج و انتگرال پذیر باشد آن گاه:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

سوال: انتگرال‌پذیری تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{3x+4}$ را در بازه‌ی $[-2,3]$ بررسی کنید.

پاسخ: تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[-2,2]$ دارای مجانب قائم است پس در این بازه انتگرال‌پذیر نیست.

نکته: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ دارای مجانب قائم باشد آن‌گاه در این بازه انتگرال‌ناپذیر است

سوال: انتگرال‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ را در بازه‌ی $[0,1]$ بررسی کنید.

پاسخ: این تابع در این بازه دارای بی‌شمار نقطه‌ی ناپیوستگی است پس در این بازه انتگرال‌ناپذیر است.

نکته: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ دارای بی‌شمار نقطه‌ی ناپیوستگی باشد آن‌گاه تابع در این بازه انتگرال‌ناپذیر است.

تست) برای تابع $f(x)=\frac{x}{1+x}$ ، روی بازه‌ی $[0,2]$ با انتخاب $n=4$ در بررسی انتگرال معین، مجموع بالا یعنی U_4 کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور)

۱) ۰/۹۵ ۲) ۱/۰۲ ۳) ۱/۰۵ ۴) ۱/۰۵

پاسخ:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$$

زیر بازه ها $=\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right],\left[1,\frac{3}{2}\right],\left[\frac{3}{21-0},2\right]$

$$f'(x)=\frac{1-0}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}>0$$

تابع روی بازه‌ی $[0,2]$ صعودی است پس Max مطلق تابع f در انتهای هر زیر بازه رخ می‌دهد پس:

$$U_4=\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)\right)\times\Delta x=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{63}{30}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{21}{20}=1/05$$

تست) تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}2 & x\in Q\\ -3 & x\notin Q\end{cases}$ مفروض است، حاصل $U_n(f)-L_n(f)$ در بازه‌ی $[0,1]$ برای $n=10$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۵

پاسخ:

$$U_{10}(f)-L_{10}(f)=|2-(-3)|\times 1=5$$

نکته: در تابع $f(x)=\begin{cases}p & x\in Q\\ q & x\notin Q\end{cases}$ روی بازه‌ی $[a,b]$ داریم: $U_n-L_n=|p-g|(b-a)$

انتگرال

تست) مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی تابع $y = \frac{1+sinx}{cos^2x}$ و محور x ها و دو خط به معادلات $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$ و کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) 13 ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $2\sqrt{3}-3$

پاسخ: همواره داریم: $cos^2x > 0$, $1 + sinx > 0$ ، پس مساحت ناحیه‌ی مورد نظر برابر است با:

$$s = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+sinx}{cos^2x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{cos^2x}\, dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cos^2x}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+tan^2x)dx + 0 = 2(tanx)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2tan\frac{\pi}{3} - 2\times 0 = 2\sqrt{3}$$

انتگرال

نکته: ۱) اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ ، آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی محصور بین منحنی به معادله‌ی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$, $x = b$ از رابطه‌ی $s = \int_a^b f(x)dx$ به دست می‌آید.

۲) اگر تابع f f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a,b]$, $f(x) \leq 0$ ، آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع به معادله‌ی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$, $x = b$ بر حسب واحد مربع از رابطه‌ی $s = -\int_a^b f(x)dx$ به دست می‌آید.

سوال: سطح محصور بین نمودار منحنی‌های $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$y^2=4x \implies y=2\sqrt{x}$$

$$x^2=4y \implies y=\frac{1}{4}x^2 \implies \frac{1}{4}x^2=2\sqrt{x} \implies x^4=8x \implies x^4=64x$$

$$\implies x(x^3-64)=0 \implies \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$$s=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{4}x^2\right)dx=\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{12}x^3\right)\Big|_0^4=\frac{32}{3}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$

نکته: مساحت ناحیه‌ی محصور بین دو منحنی $x^2=ay$, $y^2=bx$ همواره برابر $s=\frac{|ab|}{3}$ است.

سوال: اندازه‌ی سطح محصور بین دو منحنی به معادله‌های $g(x)=x^2+3x-2$, $f(x)=x^3+x^2$ را بیابید.

پاسخ: برای یافتن b , a (حد و انتگرال‌گیری) دو معادله را با هم قطع می‌دهیم یعنی:

$$f(x)=g(x) \implies x^3+x^2=x^3+3x-2 \implies x^2-3x+2=0$$

$$\implies (x-1)(x-2)=0 \implies \begin{cases} x=1=a \\ x=2=b \end{cases}$$

$$s=\left|\int_a^b(f(x)-g(x)dx\right|=\left|\int_1^2(x^2-3x+2)dx\right|=\left|(\frac{x^3}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x)\right|_1^2$$

$$=\left|\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right)+(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2)\right|=\left|\frac{7}{3}-\frac{9}{2}+2\right|=\left|\frac{14-27+12}{6}\right|=\frac{1}{6}$$

نکته: اگر f , g در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و نمودارهای آن در بازه‌ی $[a,b]$ نقطه یا نقاط تقاطع نداشته باشند آن گاه سطح محصور بین نمودارهای دو تابع f , g در بازه‌ی $[a,b]$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

تست) اگر $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$ ، معادله‌ی مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ واقع برآن کدام است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $y=2x-2$ ۲) $2y=x-1$ ۳) $2y=x-2$ ۴) $y=2x-1$

پاسخ:

$x=1 \Rightarrow f(1)=\int_1^1 \frac{dt}{1+t^3}=0 \Rightarrow$ نقطه ی تماس $A(1,0)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^3} \Rightarrow$ مماس $m=f'(1)=\frac{1}{2}$

$y-0=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y=x-1$

تست) شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در هر نقطه‌ی $m(x,y)$ واقع بر آن برابر $\frac{3}{(x-1)^2}$ است اگر منحنی این تابع از نقطه‌ی $(2,1)$ بگذرد معادله‌ی خط مجانب افقی آن کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $y = -3$ ۲) $y = 2$ ۳) $y = 3$ ۴) $y = 4$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3}{(x-1)^2}\, dx = \frac{-3}{(x-1)} + c$$

$$f(x) = \frac{-3}{(x-1)} + c \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-3}{(2-1)} + c \Rightarrow c = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-3}{(x-1)} + 4 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 4 \Rightarrow y = 4$$ مجانب افقی

موفق باشید

عباس اسدی امیرآبادی
Abas.asadi68@yahoo.com