

دنباله

در حالت کلی جمله‌ی عمومی یک دنباله می‌تواند شکل‌های مختلفی داشته باشد برخی دنباله‌ها هستند که جملات آنها به یک عدد خاص نزدیک می‌شوند.

تعریف: اگر جملات دنباله‌ای مثل a_n را از یک عدد معین مثل L کم کنیم و جملات دنباله‌ی تفاضل $(a_n - L$ یا $L - a_n)$ به صفر نزدیک شوند گوئیم جملات دنباله به L نزدیک می‌شوند.

مثال: جملات دنباله‌ی $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

پاسخ: ابتدا به کمک تفکیک کسر، a_n را به صورت زیر در می‌آوریم:

$$a_n = \frac{3n+1}{n+2} = \frac{3n+6-5}{n+2} = 3 - \frac{5}{n+2}$$

با توجه به این که با بزرگ شدن n ، مخرج کسر $\frac{5}{n+2}$ بزرگ می‌شود و صورت تغییر نمی‌کند پس وقتی n بسیار بزرگ شود مخرج کسر $\frac{5}{n+2}$ بسیار بزرگ می‌شود و نزدیک به صفر می‌شود بنابراین دنباله‌ی a_n بسیار به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری

برای هر عدد حقیقی مثبت مانند x می‌توانیم دنباله‌ای از اعداد اعشاری بسازیم که جملات آن به x نزدیک شوند جمله‌ی n امین این دنباله‌ی اعشاری با n رقم اعشار می‌باشد و هر جمله‌ی آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبل حاصل می‌شود.

تست) اگر $10x - 1/01 < 77/2$, $5x - 1/1 > 38$, آن‌گاه دنباله‌ی تقریبات اعشاری عدد حقیقی x را حداکثر تا جمله‌ی چندم می‌توان نوشت؟

(۱) جمله‌ی اول (۲) جمله‌ی دوم (۳) جمله‌ی سوم (۴) جمله‌ی چهارم

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} 10x - 1/01 < 77/2 \Rightarrow 10x < 78/21 \Rightarrow x < 7/821 \\ 5x - 1/1 > 38 \Rightarrow 5x > 39/1 \Rightarrow x > 7/820 \end{array} \right\} \Rightarrow 7/820 < 7/821$$

طبق نامساوی بالا رقم سوم بعد از اعشار حتماً صفر می‌باشد و دنباله‌ی تقریبات اعشاری را تا جمله‌ی سوم می‌توان نوشت:

$$x_1 = 7/8 \quad x_2 = 7/82 \quad x_3 = 7/820$$

نکته: اگر در نامساوی به دست آمده اولین رقم اعشار نامساوی در دو عدد، دو عدد صحیح متوالی باشند هیچ رقم دیگر به جز رقم کوچکتر نامساوی نمی‌تواند به جای آن رقم اعشار بنشیند.

تست) جملات دنباله‌ی $2/39, 2/399, 2/3999, 2/39999, \dots$ به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شوند جمله‌ی دهم دنباله‌ی تفاضل آنها از این عدد ثابت کدام است؟ (سراسری ۹۴)

$$2 \times 10^{-10} \text{ (۴)} \quad 10^{-9} \text{ (۳)} \quad 10^{-10} \text{ (۲)} \quad 10^{-11} \text{ (۱)}$$

پاسخ: دنباله‌ی مورد نظر به عدد $2/4$ همگرا است دنباله‌ی تفاضل آن را به صورت $|L - a_n|$ در نظر داریم:

$$C_n = |L - a_n|$$

$$C_1 = 2/4 - 2/39 = 0/01 \quad C_2 = 2/4 - 2/399 = 0/001 \quad C_3 = 2/4 - 2/3999 = 0/0001$$

تست) دنباله‌ی اعداد $1/45, 1/4545, 1/454545, \dots$ به عدد ثابت و گویای A بسیار نزدیک می‌شود عدد $\frac{1}{A}$ دارای چند رقم اعشار است؟ (خارج ۹۴)

پاسخ: این دنباله به عدد $1/\overline{45}$ یعنی کسر متعارفی $\frac{145-1}{99}$ یا $\frac{16}{11}$ همگرا است.

$$۷ \text{ (۴)} \quad ۶ \text{ (۳)} \quad ۵ \text{ (۲)} \quad ۴ \text{ (۱)}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\
 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 = 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\
 \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\
 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{11}{16} = \frac{11 \times 5^4}{2^4 \times 4} = \frac{6785}{10000} = 0.6785$$

دنباله‌ی عددی

دنباله

تعریف: دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبل از خود به دست می‌آید را دنباله‌ی عددی (حسابی) گوئیم به این مقدار ثابت قدر نسبت گوئیم و آن را با d نمایش می‌دهیم.

تست) اعداد $2p + 3, 3p + 4, 5p - 1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی عددی هستند، قدر نسبت کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

پاسخ:

$$2(3p + 4) = 2p + 3 + 5p + 1 \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \Rightarrow p = 6$$

$$p = 6 \Rightarrow 15, 22, 29 \Rightarrow d = 22 - 15 = 7$$

نکته: اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی (عدد) باشند آن گاه b را واسطه‌ی (میانگین) حسابی b, c می‌گوئیم و داریم:

$$2b = a + c \quad \text{یا} \quad b = \frac{a + c}{2}$$

تست) اعداد $1, x, y, \frac{5}{2}$ چهار جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی‌اند، مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۶)

- ۵۷ (۱)
- ۶۲/۵ (۲)
- ۶۷/۵ (۳)
- ۶۸ (۴)



پاسخ:

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_4 = \frac{5}{2}$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1)d \Rightarrow \frac{5}{2} = 1 + (3)d \Rightarrow \frac{3}{2} = 3d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \left(2(1) + 14 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{15}{2} \times 9 = 67.5$$

نکته: جمله عمومی یک دنباله‌ی عددی (حسابی) به صورت $a_n = a_1 + (n - 1)d$ می‌باشد که در آن a_1 جمله‌ی n ام و n تعداد جملات می‌باشد.

نکته: در یک دنباله‌ی عددی (حسابی) متناهی، مجموع n جمله‌ی اول از روابط زیر بدست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_n + a_1)$$

تست) اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره‌ی آن دسته باشد، ... (1), (3, 5), (7, 9, 11), ... جمله‌ی آخر دسته‌ی بیستم کدام است؟ (ریاضی خارج

(۹)

۴۲۳ (۴) ۴۲۱ (۳) ۴۱۹ (۲) ۴۱۵ (۱)

پاسخ: تعداد اعداد فرد قرار گرفته در دسته‌ها به ترتیب ... 3, 2, 1 است بنابراین از دسته‌ی اول تا انتهای

دسته‌ی بیستم به تعداد $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$ عدد قرار دارد در نتیجه عضو آخر

این دسته یعنی دسته‌ی بیستم ۲۱۰ امین عدد طبیعی فرد است یعنی:

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow a_{10} = 2(210) - 1 = 419$$

نکته: اعداد طبیعی فرد را با $a_n = 2n - 1$ نشان می‌دهیم. ($n \in \mathbb{N}$)

اعداد صحیح فرد را با $a_n = 2n + 1$ نشان می‌دهیم. ($n \in \mathbb{Z}$)

تست) اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که جمله‌ی آخر هر دسته مجذور کامل باشد،
 (1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), ... ، مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟

(ریاضی خارج ۸۴)

- ۱۷۸۴ (۴) ۱۷۲۹ (۳) ۱۷۱۰ (۲) ۱۶۹۱ (۱)

پاسخ: اگر به دسته‌های داده شده دقت کنیم دسته‌ی n ام از عدد $(n - 1)^2 + 1$ شروع و به n^2 ختم می‌شود پس در دسته‌ی دهم داریم:

$$(10 - 1)^2 + 1 = 82 \quad , \quad n^2 = 10^2 = 100$$

$$(82, 83, \dots, 100) \quad d = 1 \quad , \quad a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 100 = 82 + (n - 1)$$

$$S_n = S_{19} = \frac{19}{2}(82 + 100) = 1729$$

تست) مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است، در این دنباله

مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هیجدهم کدام است؟ (خارج ۹۰)

- ۱۸ (۴) $\frac{49}{3}$ (۳) $\frac{29}{3}$ (۲) ۹ (۱)

پاسخ:



$$S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) + 3 \times \frac{12}{2}(2a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow 16a_1 + 8d = 0 \Rightarrow d + 2a_1 = 0$$

از طرفی جمله‌ی سوم برابر ۶ می‌باشد پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d + 2a_1 = 0 \\ 2d + a_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow d = 4, \quad a_1 = -2$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow a_{10} = -2 + 36 = 34$$

دنباله‌ی هندسی

دنباله‌ی هندسی یک دنباله از اعداد است که در آن هر جمله (بجز جمله‌ی اول) از ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت می‌گوئیم و با q (یا r) نمایش می‌دهیم.

تست) اعداد 2^a ، $4\sqrt{2}$ ، 2^b سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی‌اند واسطه‌ی عددی بین a ، b کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

$$\sqrt{2} \quad (۴) \qquad ۱/۵ \quad (۳) \qquad ۲ \quad (۲) \qquad ۲/۵ \quad (۱)$$

پاسخ:

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = 2^{a+b} \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b}$$

$$\Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \text{ می‌باشد} \text{، } b, a \text{ واسطه‌ی عددی بین } a, b$$

نکته: اگر a ، b ، c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند آن‌گاه b را واسطه (میانگین) هندسی بین a ، c گوئیم. یعنی:

$$b^2 = a.c$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\alpha + \alpha) &= 2\sin^2 \alpha & 1 - \cos(\alpha - \alpha) &= 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 &= 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 & 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha & \cos(\alpha - \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\ 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha & 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

تست) بین دو عدد 324 ، 4 سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله ی هندسی بدهد، مجموع این 5 عدد مثبت کدام است؟

(ریاضی خارج 91)

- ۴۸۸ (۴) ۴۸۶ (۳) ۴۸۴ (۲) ۴۸۲ (۱)

پاسخ:

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 q^4}{a_1} = q^4 \Rightarrow \frac{324}{4} = q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

چون جملات مثبت فرض شده اند پس $q = -3$ قابل قبول نیست بنابراین $q = 3$

$$S_5 = \frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{4(1 - 3^5)}{1 - 3} = \frac{4(1 - 243)}{-2} = 484$$

تست) تعداد جملات یک دنباله ی هندسی عددی زوج است اگر مجموع تمام جملات آن 3 برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد قدرنسبت آن کدام است؟

(ریاضی 94)

- 3 (۴) 2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: در یک دنباله ی هندسی با تعداد جملات زوج $(2n)$ ، جملات ردیف فرد خود یک دنباله ی هندسی با

قدر نسبت q^2 می سازند بنابراین اگر مجموع جملات دنباله دار با S_n و مجموع جملات دنباله ی با ردیف فرد را

با S'_n نشان دهیم داریم:

$$\frac{S_n}{S'_n} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q}}{\frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q^2}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{S'_n} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{(1 - q)} = 3 \Rightarrow q + 1 = 3 \Rightarrow q = 2$$



تست ۳۳) در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $4, a, 9, b, \dots$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟ (خارج ۸۹)

- $83\frac{1}{8}$ (۴) $82\frac{3}{8}$ (۳) $81\frac{7}{8}$ (۲) $81\frac{3}{8}$ (۱)

پاسخ:

$$a^2 = 4(9) = 36 \Rightarrow a = \pm 36$$

چون دنباله صعودی است $a = 6$ قابل قبول است یعنی داریم:

$$4, 6, 9, b, \dots \quad q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 9 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$$

$$S_6 = \frac{4(1 - (\frac{3}{2})^6)}{1 - \frac{3}{2}} = 83\frac{1}{8}$$

تست ۳۴) در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع ۶ جمله اول آن ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟ (ریاضی ۸۹)

- $\frac{81}{16}$ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴)

پاسخ:

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = 1 - q^3 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \left(\frac{1}{q}\right)^4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^4 = 16$$



$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \alpha - 1 &= 2(1 - \sin^2 \alpha) - 1 = 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \cos(\alpha + \alpha) &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \\ 2 - 2\sin^2 \alpha - 1 &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

تست) اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3\sqrt{3}}, \dots$ آن‌گاه

(سراسری ۸۰)

a کدام است؟

۳) $3 + \sqrt{3}$

۴) $3\sqrt{3} - 1$

۵) $3 - \sqrt{3}$

۶) $3\sqrt{3} - 3$

پاسخ:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 3 \Rightarrow \frac{a_1}{1 - q} = 3 \quad q = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}a}{3 - \sqrt{3}} = 3 \Rightarrow \sqrt{3}a = 9 - 3\sqrt{3}$$

$$a = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(9 - \sqrt{3})}{3} = \frac{9\sqrt{3} - 3}{3} = 3(\sqrt{3} - 1)$$

نکته: اگر در یک دنباله‌ی هندسی $|q| < 1$ ، $n \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

در نتیجه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

موفق و پیروز باشید
عباس اسدی امیرآبادی



دنباله