

بچه های عزیزم، سلام، با تخته احتمال سال سوم دبیرستان در خدمت شما هستیم. با من همراه باشید:

**دسته اول** (سوالاتی هستند که در آنها از کلمات حداقل یا حداکثر استفاده می شود، هر وقت این سوالات را دیدید، قبل از هر کاری این دو کلمه را به صورت زیر معنی کنید. به عبارت دیگر مساله را تبدیل به چند قسمت کنید.

**۱** حداکثر  $k$  نفر، یعنی  $k$  نفر یا کمتر از  $k$  نفر. به عبارت دیگر یعنی:  $k$  نفر یا  $(k-1)$  نفر یا  $\dots$  یا  $۲$  نفر یا  $۱$  نفر یا  $۰$  نفر.

**۲** حداقل  $k$  نفر، یعنی  $k$  نفر یا بیشتر از  $k$  نفر. به عبارت دیگر یعنی:  $k$  نفر یا  $(k+1)$  نفر یا  $(k+2)$  نفر یا  $\dots$ .

به تست کنکور خارج ۹۴ که خیلی مهم هست توجه کنید، تست سخت و جدیدی بوده است:

۱۳۲- در جعبه‌ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

$$\frac{20}{91} \quad (۱) \quad \frac{25}{77} \quad (۲) \quad \frac{40}{143} \quad (۳) \quad \frac{50}{143} \quad (۴)$$

خب برای حل آن می‌گیم ۴ مهره می‌خوام که یکی باید قرمز باشه، خب یه مهره ی قرمز برمی‌دارم، حالا ۳ مهره دیگه مونده که باید بردارم که طبق مساله باید حداقل ۲ تا از اون ۳ تا سفید باشه. بچه ها سریع کلمه حداقل را معنی کنید: میشه ۲ تا سفید یا ۳ تا سفید! پس دو حالت زیر را داریم:

**الف) یک مهره قرمز و ۲ مهره سفید** در حالتی که ۲ مهره سفید می‌خوام، قبلا هم که یک مهره قرمز برداشته بودم تا اینجا ۳ مهره برداشتم ولی سوال گفته ۴ تا باید برداری پس یه مهره دیگه هنوز مونده که باید اونو از رنگ سیاه باقی مونده بردارم!! خیلی مهمه هاهاهاهاهاهاه این قسمتمو همه یادشون میره آهای آقا پسر، دختر خانم گل من خواست باشه توی هر مرحله چندتا برداشتی و چندتا مساله خواسته!!!! خب پس میشه

$$\binom{2}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{1}$$

**ب) یک مهره قرمز و ۳ مهره سفید** در حالتی که ۳ مهره سفید می‌خوام، قبلا هم که یک مهره قرمز برداشته بودم تا اینجا ۴ مهره برداشتم و

خواسته مساله هم ۴ تا بوده پس ظرفیت تکمیل و دیگه نباید مهره از رنگ سیاه بردارم که میشه

$$\binom{2}{1} \times \binom{7}{3}$$

در انتها چون گفته بودیم حالت الف یا حالت ب، یعنی از کلمه **یا** استفاده کرده بودیم، جوابها رو با هم جمع می‌کنیم.

فضای نمونه ای هم که به ما ربطی نداره از چه رنگ های خواسته، مهم اینکه کلا ۴ تا مهره خواسته از ۱۴ تا

$$\binom{2}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{2}{1} \times \binom{7}{3}$$

مهره موجود. بنابراین:

۱۳۲- پاسخ: گزینه ۳

$$n(S) = \binom{7+5+2}{4} = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!10!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1001$$

$$n(A) = \binom{2}{1} \binom{7}{2} \binom{5}{1} + \binom{2}{1} \binom{7}{3} = (2 \times \frac{7 \times 6}{2} \times 5) + (2 \times \frac{7!}{3!4!}) = 210 + 70 = 280$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{280}{1001} = \frac{40}{143}$$

یا به تست زیر دقت کنید که در سال ۹۱ در کنکور اومد و باز هم کلمه حداکثر در صورت سوال داشت و باید بگیم حداکثر در ۳ پرتاب یعنی اینکه ۳ پرتاب یا ۲ پرتاب یا ۱ پرتاب. یعنی مساله به ۳ قسمت تقسیم شده و هر قسمت را جداگانه حساب کرده و جوابها را با هم جمع میکنیم.

**۴۲** دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب

نتیجه حاصل می‌شود؟

$$\frac{27}{64} \quad (۱) \quad \frac{37}{64} \quad (۲) \quad \frac{19}{32} \quad (۳) \quad \frac{39}{64} \quad (۴)$$

دابل پرتاب ۱۹

**دسته دوم:** سوالاتی هستند که برای حل اونها باید از روش متمم استفاده کنیم که معمولا در این سوالات کلمات (حداقل) یا (حداکثر) می بینیم. فرق این دسته با دسته بالا این است که در این سوالات اگر بخواهیم از روش معمولی بریم یا مساله خیلی طول می کشه و یا اینکه اصلا بلد نیستیم معمولی حلش کنیم. این سوالات را که دیدید از روش متمم خدایامرز هم یادی بکنید 😊 مخصوصا کلمه (حداقل یکی) رو اگر دیدین خیلی متمم کمکتون می کنه. به تمرین مهم کتاب زیر دقت کنید:

در کیسه‌ای ۳ مهره سیاه، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل ۲ مهره هم‌رنگ باشند، کدام است؟

$$0.7 \quad (4)$$

$$0.3 \quad (3)$$

$$0.4 \quad (2)$$

$$0.6 \quad (1)$$

حداقل ۲ مهره از ۳ مهره انتخابی هم‌رنگ باشد، یعنی ۲ مهره یا هر ۳ مهره هم‌رنگ باشد. چون محاسبه‌ی این حالات وقت‌گیر است، از روش متمم مساله را حل می‌کنیم. متمم پیشامد فوق آن است که ۳ مهره را از رنگ‌های مختلف برداریم، از طرفی فضای نمونه‌ای هم انتخاب ۲ مهره از کل مهره‌ها (۱۰ = ۳ + ۴ + ۳) است. بنابراین:

$$P(A') = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3 \times 4 \times 3}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{3 \times 4 \times 3}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6 \times 7!}} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0.7$$

**دسته سوم:** قانون جمع احتمالات و پیشامدهای مستقل و ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه احتمال آن که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد،  $P(A \cup B)$  بوده و فرمول آن به صورت زیر است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال رخداد A یا B

احتمال رخداد A و B با هم

به تمرین مهم کتاب درسی توجه کنید:

دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا اعداد رو شده‌ی هر دو تاس زوج باشد، کدام است؟

$$\frac{10}{36} \quad (4)$$

$$\frac{9}{36} \quad (3)$$

$$\frac{8}{36} \quad (2)$$

$$\frac{11}{36} \quad (1)$$

می‌دانیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس  $n(S) = 36$  است. حال اگر A پیشامد مجموع اعداد ۸ و B پیشامد زوج بودن اعداد باشد، خواسته‌ی مساله به خاطر کلمه‌ی «یا» که در صورت سؤال آمده  $P(A \cup B)$  است. حال ابتدا A و B را می‌یابیم:

$$\begin{cases} A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} \\ B = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{(2,6), (4,4), (6,2)\}$$

بنابراین با توجه به قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

**دسته چهارم:** دو پیشامد مستقل:

دو پیشامد A و B را مستقل از هم گویند، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. در این صورت داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**دو پیشامد ناسازگار:** دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد.  $(A \cap B = \emptyset)$  در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

به تمرین مهم کتاب درسی زیر توجه کنید که می‌تونه به تست خوب کنکور باشه:

احتمال این که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۶ و احتمال این که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند، ۰/۷ است. چه قدر احتمال دارد که حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکنند؟

۰/۴ (۱)      ۰/۸ (۲)      ۰/۴۲ (۳)      ۰/۵۸ (۴)

از روش متمم برای حل استفاده می‌کنیم. حداقل یکی ناراحتی قلبی پیدا نکند، یعنی یکی از آن‌ها ناراحتی پیدا نکند یا هر دو ناراحتی پیدا نکنند و متمم آن وقتی رخ می‌دهد که هر دو ناراحتی قلبی پیدا کنند. یعنی باید  $P(A \cap B)$  را بیابیم. از طرفی A و B مستقل‌اند، پس داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42 \Rightarrow P(\text{خواسته‌ی مسئله}) = 1 - 0.42 = 0.58$$

### دسته پنجم: مسائل پرتاب دو تاس

اگر دو تاس را با هم پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای ۳۶ حالت دارد و مجموع اعداد رو شده بین ۲ تا ۱۲ هستند. از جدول زیر برای محاسبه احتمال در این نوع مسائل استفاده می‌کنیم:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$n(A)$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

به جدول و توضیحات بعد از آن خوب دقت کنید:

طبق جدول فوق مثلاً، اگر بگویند مجموع دو تاس در چند حالت برابر ۷ می‌شود، جواب برابر ۶ است.

### شگفتی جدول:

- تا مجموع ۷، تعداد حالات همواره یکی کمتر از مجموع خواسته شده است. مثلاً: مجموع ۶ دارای  $6-1=5$  حالت است.
- از مجموع ۸ به بعد، تعداد حالات برابر ۱۳ منهای مجموع خواسته شده است. مثلاً: مجموع ۹ دارای  $13-9=4$  حالت است.

به تست زیر که در کنکور داخل ۹۲ اومده توجه کنید:

دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

$\frac{2}{9}$  (۱)       $\frac{5}{18}$  (۲)       $\frac{5}{12}$  (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)

روش اول: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای  $n(S) = 36$  است. از طرفی مجموع دو عدد مضرب ۴ باشد، یعنی مجموع ۴ یا ۸ یا ۱۲ شود. حال با توجه به جدول در ستاره و ویژگی‌های گفته شده می‌توانیم بدون نوشتن حالات، احتمال‌ها را محاسبه کنیم:

$$P(A) = P(\text{مجموع } 4) + P(\text{مجموع } 8) + P(\text{مجموع } 12) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

### دسته ششم: مسائل فرزند یا سکه:

در این مسائل خیلی مهمه که بدونید اگه یک سکه را  $n$  بار پرتاب کنیم احتمال دقیقاً  $k$  بار (رو) آمدن  $k$  بار (پشت) آمدن برابر  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

یا در یک خانواده  $n$  فرزندی احتمال دقیقاً  $k$  پسر ( $k$  دختر) نیز برابر  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$  است. مثلاً در یک خانواده ۴ فرزندی احتمال اینکه این

خانواده دقیقاً ۳ دختر داشته باشه طبق فرمول برابر  $\frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$  میشه.

موفق باشید.

@see\_i

www.soalsara.ir

دانلود از سایت سوال سرا