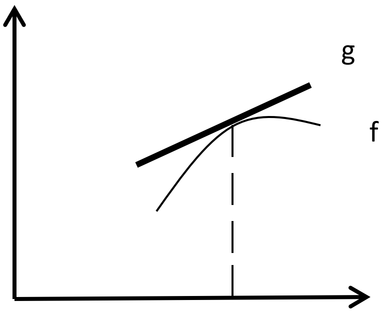
هم ارزی: اگر در $x=a$ تابع g بر تابع f مماس بشود می توانیم بگوییم که: در مجاورت a (یعنی $x\to a$)، $f(x)$ هم ارزی به نام $g(x)$ دارد و می نویسیم $f(x)\underset{x\to a}{\simeq} g(x)$



وقتی که $x\to \circ$ میل کند، تابع $f(x)$ با عبارتی که توان کمتری دارد هم ارز است به عنوان مثال

$$\lim_{x\to \circ} x+x^{۲}+x^{\frac{۵}{۲}} \sim x$$

$$\lim_{x\to \circ} \sqrt[۳]{x}+\sqrt[۵]{x}+x \sim \sqrt[۵]{x}$$

هم ارزی برنولی: هم ارز روابط زیر را وقتی $x\to \circ$ میل می کند را بدست آورید.

$$(۱+x)^{۲}=۱+۲x+x^{۲} \overset{x\to\circ}{\sim} ۱+۲x$$

$$(۱+x)^{۳}=۱+۳x+۳x^{۲}+x^{۳} \overset{x\to\circ}{\sim} ۱+۳x$$

$$(۱+x)^{۴}=۱+۴x+۶x^{۲}+۴x^{۳}+x^{۴} \overset{x\to\circ}{\sim} ۱+۴x$$

$$\vdots$$

$$(۱+x)^{n}=۱+nx+\dots\dots\dots+x^{n} \overset{x\to\circ}{\sim} ۱+nx$$

پس می توان گفت که:

$$\begin{cases}(۱\pm x)^{n} \underset{x\to\circ}{\simeq} ۱\pm nx \\ \sqrt[n]{۱\pm x} \underset{x\to\circ}{\simeq} ۱\pm\frac{x}{n}\end{cases}$$

حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱+۳x\right)^{۴}-\left(۱-۲x\right)^{۵}}{\sqrt[۲]{۱+x}-\sqrt[۳]{۱-۵x}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱+۱۲x\right)-\left(۱-۱۰x\right)}{(۱+\frac{۱}{۲}x)-(۱-\frac{۵}{۳}x)}=\frac{۲۲x}{\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۳}x}=\frac{۲۲}{\frac{۱۳}{۶}}=\frac{۱۳۲}{۱۳}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[m]{۱+\alpha x}-\sqrt[n]{۱+\beta x}}{x^{۳}+x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱+\frac{\alpha}{m}x\right)-\left(۱+\frac{\beta}{n}x\right)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\right)x}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱+x\right)^{۱۲}+\left(۱+x\right)^{۱۳}-۲۰x-۲}{۵x}=\frac{۰}{۰}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱+۱۲x\right)+\left(۱+۱۳x\right)-۲۰x-۲}{۵x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲۵x-۲۰x}{۵x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۵x}{۵x}=۱$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}}{x}$$

(کتاب درسی و کنکور)

راه حل اول این هست که شما این عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می کنید و ... که خیلی طولانی می شود اما با استفاده از هم ارزی برنولی خیلی راحت به جواب می رسید

$$\lim_{x\to ۰}\sqrt{۱-x^{۲}}\sim ۱-\frac{x^{۲}}{۲}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\sim\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}=\frac{\frac{-x}{\sqrt{2}}}{x}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{1+4x}-x^2-1}$$

در صورت کسر، از دو رادیکال دوم به ترتیب از ۴ و ۸ فاکتور می گیریم.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{4(\frac{x}{4}+1)}-\sqrt{9(\frac{x^2}{9}+1)}}{\sqrt{1+4x}-x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}+2\sqrt{1+\frac{x}{4}}-3\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}{\sqrt{1+4x}-x^2-1}\simeq$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{2x}{2}\right)+2\left(1+\frac{x}{8}\right)-3\left(1+\frac{x^2}{18}\right)}{\left(1+\frac{4x}{2}\right)-x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x}{4}-\cancel{\frac{x^2}{6}}}{2x-\cancel{x^2}}=\frac{\frac{5x}{4}}{2x}=\frac{5}{8}$$

هم ارزی های زیر را خوب به خاطر بسپارید. در ده سال اخیر کنکور از این هم ارزی در قسمت حد، سوالات زیادی مطرح شده است.

$$\lim_{x\to 0}\sin x\sim x-\frac{x^3}{6}$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0}\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}\\ \lim_{x\to 0}\cos^m x\sim 1-m\frac{x^2}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\tan x\sim x+\frac{x^3}{3}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} x^n - \sin^n x \sim \frac{1}{6} n x^{n+2} \\ \text{حالت خاص} \quad : \lim\limits_{x\to 0} x - \sin x \sim \frac{1}{6} x^3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} \tan^n x - x^n \sim \frac{1}{3} n x^{n+2} \\ \text{حالت خاص} \quad : \lim\limits_{x\to 0} \tan x - x \sim \frac{1}{3} x^3\end{cases}$$

از جمع دو رابطه ی بالا خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} \tan^n x - \sin^n x \sim \frac{1}{2} n x^{n+2} \\ \text{حالت خاص} \quad : \lim\limits_{x\to 0} \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2} x^3\end{cases}$$

حالا با یادگیری هم ارزی های بالا سوالات چند سال

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$ (کتاب درسی)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\frac{(3x)^2}{2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9x^2}{2}+\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{-4x^2}{x^2} = -4$$

۲-حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $-\frac{3}{2}$ **۲) $-\frac{3}{4}$** **۳) $-\frac{1}{4}$** **۴) $\frac{3}{2}$**

حل = $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-2\frac{x^2}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2+\frac{x^2}{4}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{3}{4}x^2}{x^2} = -\frac{3}{4}$

گزینه ۲ درست است

۳-حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۵x}}{x^{۲}}$ **کدام است؟ (خارج از کشور-۹۳)**

۱) ۲ ‏ ‏ ‏ ۲) ۳ ‏ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ‏ ۴) ۶

$$\text{حل} = \lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{x^{۲}}{۲}\right)-\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{(۵x)^{۲}}{۲}\right)}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x^{۲}}{۴}+\frac{۲۵x^{۲}}{۴}}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۶x^{۲}}{x^{۲}}=۶$$

گزینه ۴ درست است

۴-حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos x-\cos ۳x}{۲-\sqrt{۴-x^{۲}}}$ **کدام است (سراسری ریاضی -۸۵)**

۱) ۸ ‏ ‏ ‏ ۲) ۱۲ ‏ ‏ ‏ ۳) ۱۶ ‏ ‏ ‏ ۴) ۱۸

حل: یک ابتکار به خرج می دهیم و در داخل رادیکال مخرج از ۴ فاکتور می گیریم

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{۲-\sqrt{۴\left(۱-\frac{x^{۲}}{۴}\right)}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{۲-۲\sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{۴}}}$$

در مخرج

هم ارزی

برنولی داریم

$$\sim\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲}\right)-\left(۱-\frac{(۳x)^{۲}}{۲}\right)}{۲-۲\left(۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{x^{۲}}{۴}\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۹x^{۲}}{۲}}{\frac{x^{۲}}{۴}}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۴x^{۲}}{\frac{x^{۲}}{۴}}=۱۶$$

گزینه ۳ درست است.

۵- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos x\cos ۳x-۱}{\sqrt{x^{۲}+۴}-۲}$ **کدام است؟**

۱) ۲۰ ‏ ‏ ‏ ۲) ۱۰- ‏ ‏ ‏ ۳) ۲۰- ‏ ‏ ‏ ۴) ۱۰

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲}\right)\left(۱-\frac{(۳x)^{۲}}{۲}\right)-۱}{\sqrt{۴\left(\frac{x^{۲}}{۴}+۱\right)}-۲}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱-\frac{۱۰x^{۲}}{۲}+\frac{۹x^{۴}}{۴}\right)-۱}{۲\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{۴}}-۲}$$

در مخرج

هم ارزی

برنولی داریم

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۵x^{۲}}{۲\left(۱+\frac{x^{۲}}{۸}\right)-۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۵x^{۲}}{\frac{۲x^{۲}}{۸}}=-۲۰$$

گزینه ۳ درست است.

۶- حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^{۳}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۰

حل $=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}x^{۳}}{x^{۳}}=\frac{۱}{۲}$

گزینه ۱ درست است

۷-حد کسر $\frac{\sin x+\tan x-\tan ۲x}{\tan x+x-\sin ۲x}$ وقتی $x\to ۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(x-\frac{x^{۳}}{۶}\right)+\left(x+\frac{x^{۳}}{۳}\right)-\left(۲x+\frac{(۲x)^{۳}}{۳}\right)}{\left(x+\frac{x^{۳}}{۳}\right)+x-\left(۲x-\frac{(۲x^{۳})}{۶}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۳}\left(-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}-\frac{۸}{۳}\right)}{x^{۳}\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۶}\right)}=-\frac{۳}{۲}$$

گزینه ۱ درست است.

۸- حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۳}-\sin^{۳}x}{x^{۳}\left(۱-\sqrt{\cos x}\right)}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) $-\frac{۱}{۶}$

یادآوری : $\lim_{x\to ۰} x^{n}-\sin^{n}x \sim \frac{۱}{۶}nx^{n+۲}$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۶}(۳)\,x^{۵}}{x^{۳}\left(۱-\left(۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{x^{۲}}{۲}\right)\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}x^{۵}}{x^{۳}\left(\frac{x^{۲}}{۴}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}x^{۵}}{\frac{x^{۵}}{۴}}=۲$$

گزینه ۲ درست است.

۹- حاصل $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲\sqrt{x}-\sqrt{\sin ۴x}}{x^{۲}\sqrt{x}}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۶۴}{۳}$

$$=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲\sqrt{x}-\sqrt{۴x-\left(۱-\frac{(۴x^{۲})}{۶}\right)}}{x^{۲}\sqrt{x}}=$$

در مخرج

$$=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲\sqrt{x}-۲\sqrt{x}\sqrt{۱-\frac{(۴x)^{۲}}{۶}}}{x^{۲}\sqrt{x}}=$$

هم ارزی

برنولی داریم

$$\frac{۲\sqrt{x}\left(۱-\left(۱-\frac{۱}{۲}\frac{(۴x)^{۲}}{۶}\right)\right)}{x^{۲}\sqrt{x}}=\frac{۲\sqrt{x}\ .\ \frac{۱۶x^{۲}}{۱۲}}{x^{۲}\sqrt{x}}=\frac{۸}{۳}$$

گزینه ۱ درست است.

۱۰-حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{x\sqrt{\sin x}-\sqrt{x}\tan x}{x^{۳}\sqrt{x}}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

حل: به صورت کسر $x\sqrt{x}$ اضافه و کم می کنیم تا به رابطه ی $u-\sin u\ ,\ \tan u-u$ برسیم.

$$=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x\sqrt{\sin x}-x\sqrt{x}+x\sqrt{x}-\sqrt{x}\tan x}{x^{۳}\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{-x\left(\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\right)-\sqrt{x}\left(\tan x-x\right)}{x^{۳}\sqrt{x}}\qquad \sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\overset{x\to ۰}{\sim}\frac{۸}{۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)x^{\frac{۵}{۲}}$$

$$=\frac{-x\ .\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲}\right)x^{\frac{۵}{۲}}-\sqrt{x}\left(\frac{x^{۳}}{۳}\right)}{x^{۳}\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\left(-\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۳}\right)x^{\frac{۷}{۲}}}{x^{\frac{۷}{۲}}}=-\frac{۵}{۱۲}$$

گزینه ۳ درست است.

۱۱- حد تابع $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\frac{|x-\sin x|}{x-\tan x}$ **کدام است؟**

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۴

$$\begin{cases}x<۰\ \Rightarrow\ x<\sin x\\ x>۰\ \Rightarrow\ x>\sin x\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x-\sin x|}{x-\tan x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-(x-\sin x)}{x-\tan x}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-\left(\frac{x^3}{6}\right)}{-\frac{x^3}{3}}=\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ درست است

۱۲–حاصل $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) $-\frac{1}{2}$　　۴) $-\frac{1}{3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\left(x-\frac{x^3}{2}\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{3}$$

گزینه ۲ درست است

هوپیتال:

هرگاه در محاسبه ی حد به $\frac{0^\pm}{0^\pm}$ برسیم می توانیم از هوپیتال استفاده کنیم. یعنی

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۱–حاصل $\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan \pi x}{2x-\sqrt{x}}$ **کدام است؟ (سراسری ۹۱)**

۱) -2π　　۲) $-\pi$　　۳) π　　۴) 2π

$$\lim_{x\to \frac{1}{4}} \frac{1-\tan \pi x}{2x-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to \frac{1}{4}} \frac{-\pi\left(1+\tan^{2} \pi x\right)}{2-\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{-\pi\left(1+\tan^{2}\frac{\pi}{4}\right)}{2-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}} = \frac{-\pi(1+1)}{2-1} = \frac{-2\pi}{1} = -2\pi$$

۲-حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{\tan \pi x}{x^{2}-\sqrt{x}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $-\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan \pi x}{x^{2}-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\pi\left(1+\tan^{2} \pi x\right)}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\pi\left(1+\tan^{2} \pi\right)}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$

۳- حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\sin x+\sin 3x}$ برابر کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\sin x+\sin 3x} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{\cos x+3\cos 3x} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{-\sin x-9\sin 3x} = \frac{1}{-1+9} = \frac{1}{8}$$

۴-حد عبارت $\frac{\left|x^{۲}-x-۲\right|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^{-}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

ابتدا داخل قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم $x^{۲}-x-۲=(x-۲)(x+۱)$

	-۱		۲	
$(x-۲)(x+۱)$	$+$		$-$	$+$

یعنی در سمت چپ ۲ $\left(۲^{-}\right)$ عبارت داخل قدر مطلق منفی است پس:

$$\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{\left|x^{۲}-x-۲\right|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-\left(x^{۲}-x-۲\right)}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}=\frac{\circ}{\circ}\overset{HOP}{=}$$

$$=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{-(۲x-۱)}{۲-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱۲}}}=\frac{-۳}{۲-\frac{۲}{\sqrt{۱۶}}}=\frac{-۳}{۲-\frac{۲}{۴}}=\frac{-۳}{۲-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۳}{\frac{۳}{۲}}=-۲$$

۵-حاصل $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x}$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) $\frac{۱}{٤}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

وقتی $x\to\pi$ میل می کند کمان sin یعنی $۱+\cos x$ به سمت صفر می کند پس $\sin(۱+\cos x)$ ، هم ارز $۱+\cos x$ است یعنی:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos x}{۱-\cos ۲x}=\frac{\circ}{\circ}\overset{HOP}{=}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{۲\sin ۲x}=\frac{\circ}{\circ}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x}{۴\cos ۲x}=\frac{-(-۱)}{۴(۱)}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم $=\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos x}{۱-\cos ۲x}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos x}{۲\sin^{۲}x}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱+\cos x}{۲\left(۱-\cos^{۲}x\right)}=$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(۱+\cos x)}{۲(۱+\cos x)(۱-\cos x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱}{۲(۱-\cos x)}=\frac{۱}{۲(۲)}=\frac{۱}{۴}$$

۶- اگر $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{٤}}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{٤}\right)}=۲^{a}$ **باشد، آنگاه a کدام است؟ (سراسری ۹۲)**

۱) $-\frac{۱}{۲}$ **۲)** $-\frac{۱}{٤}$ **۳)** $\frac{۱}{٤}$ **۴)** $\frac{۱}{۲}$

حل:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}=\frac{\circ}{\circ}\overset{HOP}{=}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{-\sin x}{۲\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}}{-\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}-\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}}{-۱}=\frac{۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{\frac{۲}{\sqrt[۴]{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}\cdot\sqrt[۴]{۲}}{۲}=\frac{۲^{\frac{۳}{۴}}}{۲}=۲^{-\frac{۱}{۴}}\quad\Rightarrow\quad a=-\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: کسر را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می کنیم.

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۲}\cos\cancel{\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}}{\cos\cancel{\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}\right)}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲^۲}{\sqrt{۲}}}=\frac{۱}{۲}\frac{۲}{\sqrt[۴]{۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}=۲^{-\frac{۱}{۴}}\qquad\to\qquad a=-\frac{۱}{۴}$$

نکته: اگر در داخل جز صحیح حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ شد، باز می توانید از هوپیتال استفاده کنید.

حاصل حدهای زیر را بیابید. (کتاب درسی)

$$۱)\ \lim_{x\to۰^+}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

حل $=\left[\frac{۰}{۰}\right]\overset{HOP}{=}\lim_{x\to۰^+}\left[\frac{\cos x}{۱}\right]=\left[\frac{۱^-}{۱}\right]=\left[۱^-\right]=۰$

$$۲)\ \lim_{x\to۰^-}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

(کتاب درسی)

حل $=\left[\frac{۰}{۰}\right]\overset{HOP}{=}\lim_{x\to۰^-}\left[\frac{\cos x}{۱}\right]=\left[\frac{۱^-}{۱}\right]=\left[۱^-\right]=۰$

$$۳)\ \left[\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}\right]$$

(کتاب درسی)

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}=۱\qquad\Rightarrow\qquad\left[\lim_{x\to۰}\frac{\sin x}{x}\right]=[۱]=۱$$

۴-حد عبارت $\left[\frac{\sin x}{x}\right]+۲\left[\frac{x}{\sin x}\right]$، وقتی $x\to ۰$ کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور - ۹۲)

۱)۱ ۲)۲ ۳)۳ ۴)حد ندارد

حل:

$$\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]+۲\left[\frac{x}{\sin x}\right]=\left[\frac{۰}{۰}\right]+۲\left[\frac{۰}{۰}\right]$$

$$\overset{HOP}{=}\ _{x\to ۰}\left[\frac{\cos x}{۱}\right]+۲\left[\frac{۱}{\cos x}\right]=\left[۱^-\right]+۲\left[\frac{۱}{۱^-}\right]=$$

$$۰+۲\left[۱^+\right]=۰+۲(۱)=۲$$

گزینه ۲ درست است.

۵-حاصل $\lim_{x\to ۰^+}\operatorname{sgn}\left(\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱)صفر ۲)۱ ۳)۱- ۴) حد وجود ندارد

$$\overset{HOP}{=}\lim_{x\to ۰^+}\operatorname{sgn}\left(\left[\frac{\cos x}{۱}\right]\right)=\operatorname{sgn}\left(\left[۱^-\right]\right)=\operatorname{sgn}(۰)=۰$$

۶-اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲+ax-۴}=L$ و $(L\neq ۰)$ وجود داشته باشد aL کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

حل: چون $x=۲$ صورت کسر را صفر می کند و حاصل حد، عددی غیرصفر است پس $x=۲$ ریشه ی مخرج نیز هست یعنی

$$۲(۲)^۲+a(۲)-۴=۰\Rightarrow ۸+۲a-۴=۰\Rightarrow ۲a+۴=۰\Rightarrow a=-۲$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to ۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲-۲x-۴}=\div\overset{HOP}{=}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}}{4x-2}=\frac{1-\dfrac{2}{\sqrt{9}}}{8-2}=\frac{1-\dfrac{2}{3}}{6}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{3}}{6}=\frac{1}{18}=L \qquad\Rightarrow\qquad L=\frac{1}{18}\qquad\Rightarrow\qquad aL=-\frac{1}{9}$$

محاسبه ی $\lim(0\times\infty)$ با روش های هم ارزش و هوپیتال

برای محاسبه $\lim\left(0^{\pm}\times\infty\right)$ برحسب شرایط مسأله می توانید به یکی از دو شکل زیر عمل کنید.

(۱)اگر عامل صفر شونده و عامل بی نهایت شونده دارای هم ارز باشند. در این صورت هم ارز هر عامل را به جای خود عامل بنویسید و حد را حساب کنید.

حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^{2}+2x+3}\cdot\sin\dfrac{1}{2x-1}$ وقتی $x\to-\infty$, $\dfrac{1}{2x-1}$ به سمت صفر میل می کند

$$=\lim_{x\to-\infty}|x|\times\frac{1}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-1}=\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

---

۲) $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)\left[\dfrac{1}{x^{2}-4}\right]$ وقتی $x\to-2^{-}$, $\dfrac{1}{x^{2}-4}$ به سمت بی نهایت میل می کند

$$=\lim_{x\to-2}(x+2)\cdot\frac{1}{x^{2}-4}=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-2-2}=-\frac{1}{4}$$

۲-اگر برای عامل های صفر شونده و بی نهایت شونده، هم ارز پیدا نشود در این صورت $\lim(0\times\infty)$ را به $\lim\left(\dfrac{0^{\pm}}{0^{\pm}}\right)$ تبدیل کنید و بعد به کمک قاعده ی هوپیتال به جواب برسید.

$$۱)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{٤}} (x-\frac{\pi}{٤})\tan ۲x = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{x-\frac{\pi}{۴}}{\cot ۲x} = \frac{\circ}{\circ} \quad HOP$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{-۲\left(۱+\cot^{۲} ۲x\right)} = \frac{۱}{-۲\left(۱+\circ\right)} = -\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \left(\sin x-\sqrt{۳}\cos x\right)\cot ۳x =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x-\sqrt{۳}\cos x}{\tan ۳x} = \frac{\circ}{\circ} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\cos x+\sqrt{۳}\sin x}{۳\left(۱+\tan^{۲} ۳x\right)} = \frac{\frac{۱}{۲}+\sqrt{۳}\,(\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{۳\left(۱+\circ\right)} = \frac{۲}{۳}$$

$$۳)\ A = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \left(۱+\cos ٦x\right)\tan^{۲} x$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos ۶x}{\cot^{۲} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۲\cos^{۲} ۳x}{\cot^{۲} x} = ۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \left(\frac{\cos ۳x}{\cot x}\right)^{۲}$$

ابتدا حد داخل پرانتز را به کمک هوپیتال بدست می آوریم و سپس به توان ۲ می رسانیم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos ۳x}{\cot x} = \div \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{-۳\sin ۳x}{-\left(۱+\cot^{۲} x\right)} = \frac{-۳\left(-۱\right)}{-\left(۱+\circ\right)} = -۳$$

$$\Rightarrow \quad A = ۲\times\left(-۳\right)^{۲} = ۲\times ۹ = ۱۸$$