



برای محاسبه فرمول مساحت چند ضلعی ها در هندسه از چهار اصل مساحت می کنیم:

اصل ۱: مساحت هر شکلی در صفحه، یک عدد حقیقی مثبت است.

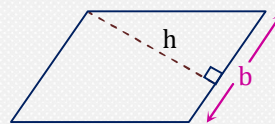
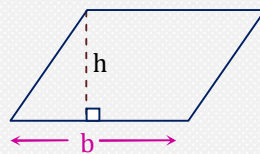
اصل ۲: اگر یک شکل از بخش های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر با مجموع مساحت های آن بخش ها است

اصل ۳: مساحت های شکل های همنهشت مساوی هستند.

اصل ۴: مساحت مستطیلی به طول ضلع های a و b برابر است با ab .

مساحت متوازی الاضلاع:

مساحت هر متوازی الاضلاع برابر با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن است: $\text{مساحت متوازی الاضلاع} = b \cdot h$



مساحت مثلث:

مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده نظیر آن، یعنی اگر اندازه ارتفاع h و اندازه قاعده نظیر آن a باشد:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} ah$$

تست: محیط متوازی الاضلاعی ۱۶ سانتی متر، یک ضلع آن ۲ سانتی متر و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر $\frac{1}{5}$ سانتی متر است. مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

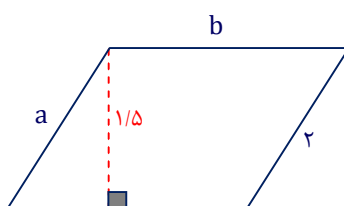
- ۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

حل: گزینه (۱).

اگر اضلاع متوازی الاضلاع را با a و b نمایش دهیم داریم:

$$16 = 2(2 + b) \xrightarrow{a=2} 16 = 2(2 + b) \Rightarrow b = 6$$

حال: $1/5 \times 6 = 9 \text{ cm}^2 = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$



تست: نسبت ارتفاع به قاعده مثلثی مانند نسبت ۴ به ۵ است. اگر مساحت مثلث برابر ۹۰ واحد سطح باشد، مجموع طول ارتفاع و قاعده نظیر آن کدام است؟

۱۳ (۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۳۶ (۴)

حل: گزینه (۳).

اگر طول ارتفاع را با h و طول قاعده نظیر آن را با a نشان دهیم با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\frac{h}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow h = 4k \quad \text{و} \quad a = 5k$$

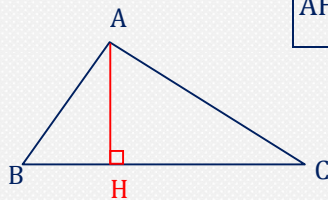
حال با استفاده از فرمول مساحت مثلث داریم:

$$S = \frac{1}{2}ah \Rightarrow 90 = \frac{1}{2} \times 4k \times 5k \Rightarrow 10k^2 = 90 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \begin{cases} h = 4k = 12 \\ a = 5k = 15 \end{cases} \Rightarrow a + h = 27$$

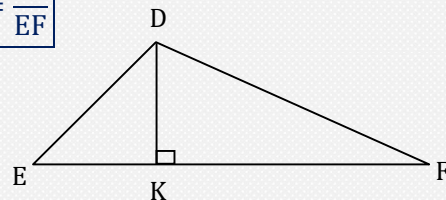
توجه داشته باشید که از آنجایی که تمام مقادیر در هندسه مثبت هستند مقدار $k = -3$ در حل معادله فوق غیر قابل قبول است.



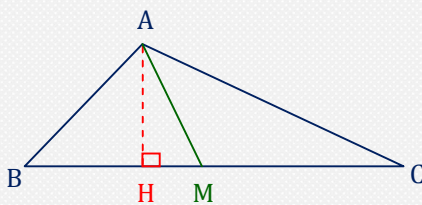
نکته: اگر ارتفاع های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت های آنها برابر نسبت قاعده های نظیر آن ارتفاع ها است.



$$AH = DK \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{BC}{EF}$$

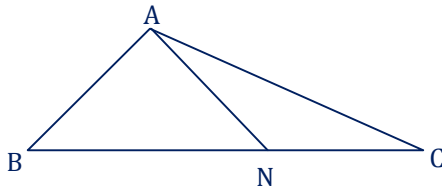


نکته: میانه هر مثلث مساحت آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.



$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BM}{\frac{1}{2}AH \times MC} \xrightarrow{BM = MC} \frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = 1 \Rightarrow S_{ABM} = S_{AMC}$$

تست: در شکل مقابل $4CN = 3BN$ ، اگر مساحت مثلث ABN برابر ۲۴ واحد سطح باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



- ۴۲ (۱) ۴۰ (۲) ۳۸ (۳) ۳۶ (۴)

حل: گزینه (۱).

$$4CN = 3BN \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} BN = 3k \\ CN = 4k \end{cases}$$

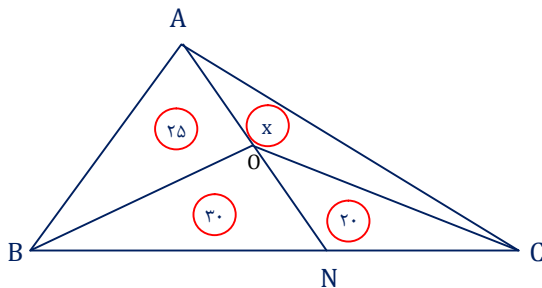
مثلث های ABN و ACN دارای ارتفاعی مشترک هستند که از رأس A رسم می شود. بنابراین نسبت مساحت های آنها با نسبت قاعده های متناظر این ارتفاع برابر است، یعنی:

$$\frac{S_{ABN}}{S_{ACN}} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow \frac{S_{ABN}}{S_{ACN}} = \frac{3k}{4k} \Rightarrow \frac{24}{S_{ACN}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{ACN} = \frac{24 \times 4}{3} \Rightarrow S_{ACN} = 32$$

$$S_{ABC} = S_{ABN} + S_{ACN} = 24 + 32 = 56$$

تست: در هر یک از شکل های زیر عدد داخل هر مثلث نشان دهنده مساحت آن است، مساحت مثلث ABC کدام است؟

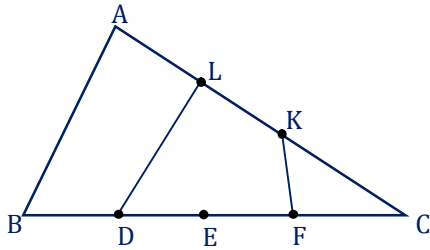
- ۴۲ (۱) $\frac{275}{3}$ (۲) ۳۸ (۳) $\frac{221}{3}$ (۴)



حل: گزینه (۲).

مثلث های ABN و ACN دارای ارتفاعی مشترکی هستند که از رأس A رسم می شود. همچنین مثلث های BON و CON دارای ارتفاعی مشترکی هستند که از رأس O رسم می شود بنابراین نسبت مساحت های آنها برابر است با نسبت قاعده های این ارتفاع مشترک.

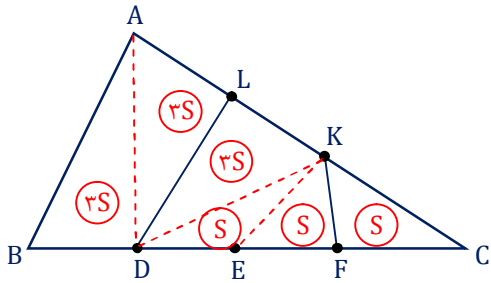
$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{ABN}}{S_{ACN}} &= \frac{55}{20+x} = \frac{BN}{CN} \\ \frac{S_{BON}}{S_{CON}} &= \frac{30}{20} = \frac{BN}{CN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{55}{20+x} = \frac{30}{20} \Rightarrow x = \frac{50}{3} \Rightarrow S_{ABC} = 20 + 25 + 30 + \frac{50}{3} = \frac{275}{3}$$



تست . در شکل مقابل : $BD = DE = EF = FC$ ، $AL = LK = KC$ ، $S_{ABC} = 72 \text{ cm}^2$ ، مساحت چهارضلعی KFDL چند سانتی متر مربع است ؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۳۶

حل : گزینه (۳) . مطابق شکل از K به E و D ، همچنین از A به D وصل می کنیم ، داریم :



$$DE = EF = FC \Rightarrow S_{KED} = S_{KEF} = S_{KFC} = s \Rightarrow S_{KDC} = 3s$$

$$AL = LK = KC \Rightarrow S_{ADL} = S_{KDL} = S_{KDC} = 3s \Rightarrow S_{ADC} = 9s$$

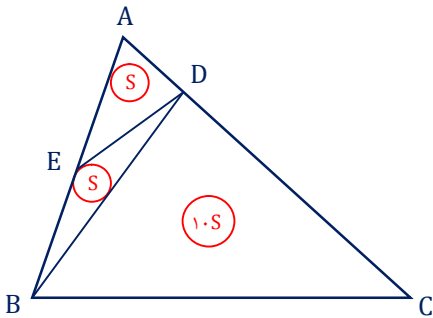
$$BD = \frac{1}{3} DC \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{3} S_{ADC} \Rightarrow S_{ABD} = 3s$$

$$S_{ABC} = 12s \Rightarrow 72 = 12s \Rightarrow s = 6 \Rightarrow S_{KFDL} = 5s = 30$$

تست . در شکل مقابل : $AE = EB$ ، $\Delta AD = DC$ ، $S_{AED} = 4 \text{ cm}^2$ ، مساحت مثلث ABC چند سانتی مترمربع است ؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۰ (۳) ۴۴ (۴) ۴۸

حل : گزینه (۴) .



$$AE = EB \Rightarrow S_{ADE} = S_{BED} = s \Rightarrow S_{ABD} = 2s$$

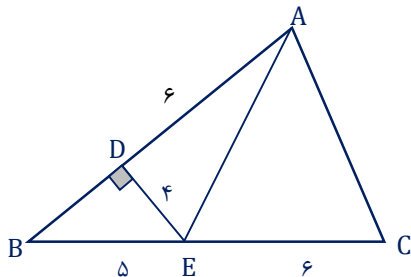
$$\Delta AD = DC \Rightarrow S_{BDC} = 2S_{ABD} \Rightarrow S_{BDC} = 10s$$

$$S_{ABC} = 12s = 12 \times 4 = 48$$

تست . در شکل مقابل ، مساحت مثلث ABC کدام است ؟

- (۱) $\frac{198}{5}$ (۲) ۳۰ (۳) $\frac{144}{5}$ (۴) ۲۳

حل : گزینه (۱) .



$$\Delta BDE : BD = 3 \Rightarrow S_{ABE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 9 = 18$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{18}{S_{ABC}} = \frac{5}{11} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{198}{5}$$



یک قطر متوازی الاضلاع مساحت آن را به دو قسمت مساوی و دو قطر هر متوازی الاضلاع مساحت آن را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند .



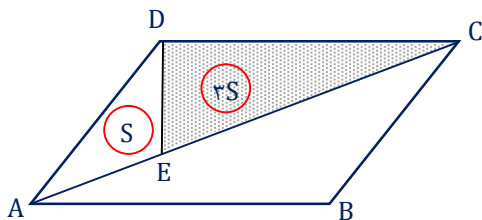
یک میانه هر مثلث، مساحت آن را به قسمت مساوی و سه میانه هر مثلث مساحت آن را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می کنند .



تست . در شکل مقابل مساحت متوازی الاضلاع ABCD برابر ۱۲۰ واحد سطح است . اگر $EC = ۳AE$ باشد ، مساحت ناحیه رنگی را بیابید .

- ۴۵ (۱) ۴۰ (۲) ۳۸ (۳) ۳۶ (۴)

حل : گزینه (۱) .



از فرض $EC = ۳AE$ داریم $S_{DEC} = ۳s$ و $S_{ADE} = s$ و در نتیجه $S_{ABCD} = ۸s$.
حال :

$$۸s = ۱۲۰ \Rightarrow s = ۱۵ \Rightarrow S_{DEC} = ۳s = ۴۵$$



مساحت مثلث و متوازی الاضلاع را با توجه به نکات زیر نیز می توان محاسبه کرد .

مساحت مثلث :

$$S = \frac{1}{2} ab \times \sin \alpha$$

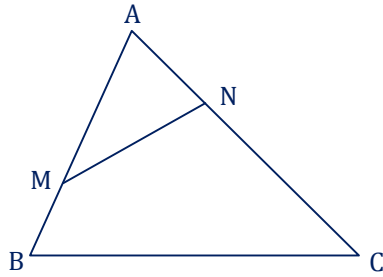
مساحت متوازی الاضلاع :

$$S_{ABCD} = ab \times \sin \alpha$$

تست. در شکل مقابل: $AM = 2MB$ و $CN = 3AN$ ، اگر مساحت مثلث AMN برابر ۳۰ واحد سطح باشد، مساحت چهارضلعی $BMNC$ کدام است؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴) ۶۰

حل: گزینه (۱).



با فرض $BM = k$ داریم: $AM = 2k$ و $AB = 3k$ ، همچنین با فرض $AN = t$ داریم: $CN = 3t$ و $AC = 4t$ ، حال:

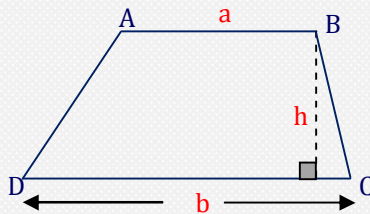
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AM \times AN \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}} = \frac{2k \times t}{3k \times 4t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{30}{S_{ABC}} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{ABC} = 180 \Rightarrow S_{BMNC} = 150$$



مساحت ذوزنقه:

مساحت ذوزنقه برابر است با نصف مجموع طول های دو قاعده ضرب در طول ارتفاع، یعنی مساحت ذوزنقه ای با طول قاعده

های a و b و طول ارتفاع h برابر است با:

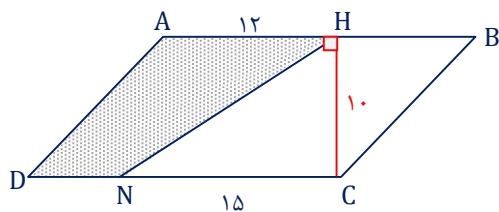


$$S = \frac{1}{2} (a + b)h$$

تست: در شکل مقابل، مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ برابر ۲۰۰ واحد سطح است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۸۵

حل: گزینه (۴).



فرض کنیم $DN = x$ ، داریم:

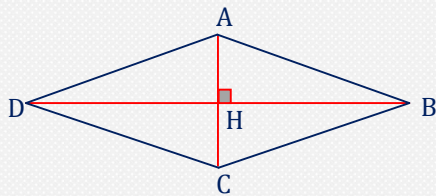
$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = CH \times DC \Rightarrow 200 = 10(15 + x) \Rightarrow 20 = 15 + x \Rightarrow x = 5$$

چهارضلعی $AHND$ ذوزنقه است (زیرا فقط دو ضلع آن موازیند)، حال:

$$\text{مساحت ذوزنقه AHND} = \frac{1}{2} CH \times (AH + DN) = \frac{1}{2} \times 10 \times (12 + 5) = 85$$



مساحت لوزی:



مساحت لوزی برابر است با نصف حاصلضرب قطرهای آن.

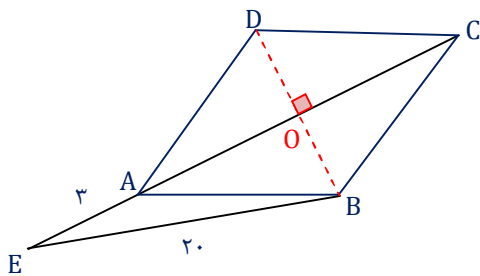
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$$

تست. در شکل مقابل: لوزی ABCD، $AC = 26$ ، $AE = 3$ و $BE = 20$ ، مساحت

لوزی ABCD چند واحد سطح است؟

- (۱) ۲۱۶ (۲) ۲۵۶ (۳) ۲۸۰ (۴) ۳۱۲

حل: گزینه (۴). قطر BD را رسم می‌کنیم. داریم:



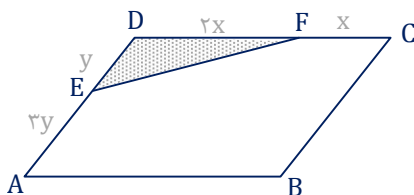
$$\Delta OEB: OB^2 = 400 - 256 \Rightarrow OB = 12 \Rightarrow DB = 24$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 26 \times 24 = 312$$

تست. در شکل مقابل: متوازی الاضلاع ABCD، $DF = 2FC$ ، $DE = EA$ و $S_{ABCD} = 60$. مساحت مثلث DEF چند واحد سطح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

حل: گزینه (۳).

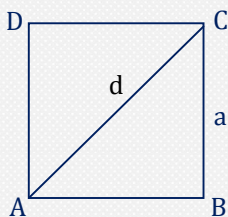


$$\frac{S_{ABCD}}{S_{DEF}} = \frac{DA \times DC \times \sin \hat{D}}{\frac{1}{2} DE \times DF \times \sin \hat{D}} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{DEF}} = \frac{12xy}{xy} \Rightarrow \frac{60}{S_{DEF}} = 12 \Rightarrow S_{DEF} = 5$$

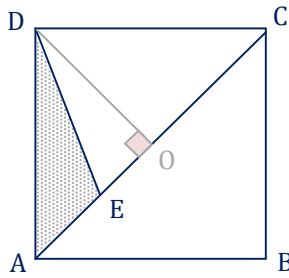


مساحت مربع: مساحت مربعی به طول ضلع a و به طول قطر d برابر است با:

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}$$



تست. در شکل مقابل: $ABCD$ مربع، $AB = 8\sqrt{2}$ ، $DE = 10$ ، مساحت مثلث ADE چند واحد سطح است؟



- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

حل: گزینه (۲).

$$AB = 8\sqrt{2} \Rightarrow AC = DB = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 16 \Rightarrow AO = DO = 8$$

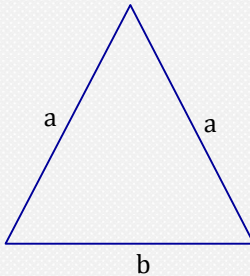
$$\triangle DOE: OE^2 = DE^2 - OD^2 \Rightarrow OE^2 = 36 \Rightarrow OE = 6 \Rightarrow AE = 2$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} DO \times AE = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$$



مساحت مثلث متساوی الساقین:

مساحت مثلث متساوی الساقینی به طول ساق a و طول قاعده b برابر است با:



$$S = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$$

تست: مساحت مثلث متساوی الساقینی به طول قاعده ۸ برابر $16\sqrt{3}$ است، طول ارتفاع وارد بر ساق این مثلث کدام است؟

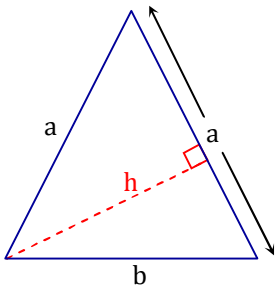
- ۱) $6\sqrt{3}$ ۲) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ۴) $3\sqrt{6}$

حل: گزینه (۲). با فرض $b = 8$ و با توجه به نکته فوق داریم:

$$S = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \Rightarrow \sqrt{4a^2 - 64} = 8\sqrt{3} \Rightarrow 4a^2 - 64 = 128 \Rightarrow a^2 = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

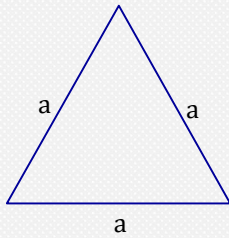
فرض کنیم h طول ارتفاع نظیر ساق مثلث باشد، داریم:

$$S = \frac{1}{2} h \cdot a \Rightarrow 16\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times h \times 4\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$





مساحت مثلث متساوی الاضلاع: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر است با:

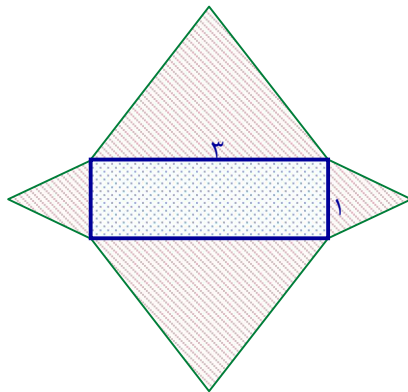


$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

تست: روی اضلاع مستطیلی به ابعاد ۱ و ۳، چهار مثلث متساوی الاضلاع بنا کرده ایم، مساحت مستطیل چند برابر مساحت مثلث ها است؟

$$(1) 6\sqrt{2} \quad (2) \frac{8\sqrt{6}}{3} \quad (3) \frac{4\sqrt{6}}{3} \quad (4) \frac{\sqrt{3}}{5}$$

حل: گزینه (۴).



با توجه به مفروضات مسأله شکل مقابل را خواهیم داشت که در آن دو مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳ و دو مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ داریم، حال:

$$\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۳} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

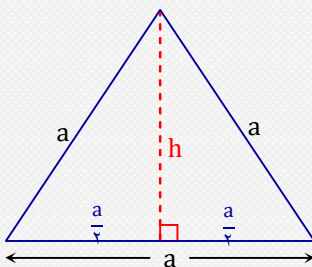
$$\text{مجموع مساحت مثلث ها} = 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3} \quad \text{و} \quad \frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مثلث ها}} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{5 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$



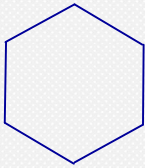
طول ارتفاع در مثلث متساوی الاضلاع:

طول ارتفاع (میانه و نیمساز) نظیر یک ضلع در مثلث متساوی الاضلاع

به طول ضلع a از رابطه ی زیر محاسبه می شود.



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



مساحت شش ضلعی منتظم: مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع a برابر است با:

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

تست: مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع a چند برابر مساحت دوزنقه ای به ارتفاع a و قاعده های a و $2a$ است؟

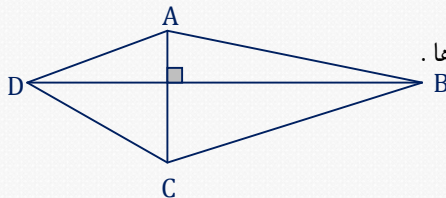
(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) 2 (۴) $\sqrt{6}$

حل: گزینه (۲).

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی}}{\text{مساحت دوزنقه}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}{\frac{1}{2} \times a(a + 2a)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}{\frac{3}{2} a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

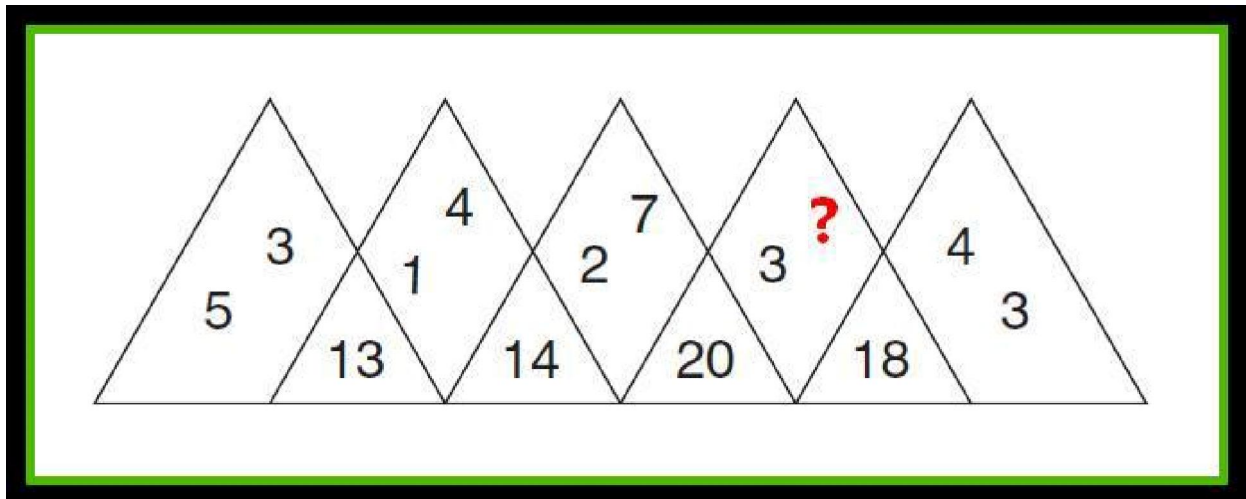


مساحت چهارضلعی با قطرهای عمود برهم:



مساحت چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند برابر است با نصف حاصلضرب قطرهای.

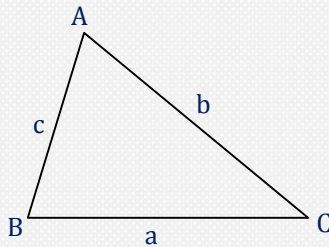
$$S = \frac{1}{2} AC \times BD$$



نکات تکمیلی



دستور هرون برای محاسبه ی مساحت مثلث :



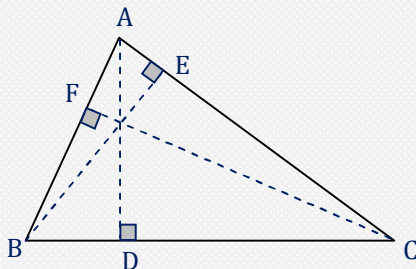
در مثلثی با طول اضلاع a ، b و c مساحت مثلث را می توان از دستور زیر محاسبه کرد :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که در آن p نصف محیط مثلث است .



رابطه میان ارتفاع های یک مثلث :



اگر h_a ، h_b و h_c ارتفاع های نظیر اضلاع BC ، AC و AB باشند داریم :

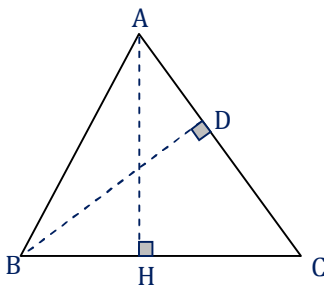
$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

تست. در شکل مقابل : $BD = 8\text{cm}$ ، $AC = 9\text{cm}$ و $AH = 6\text{cm}$ ،

طول BC کدام است ؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

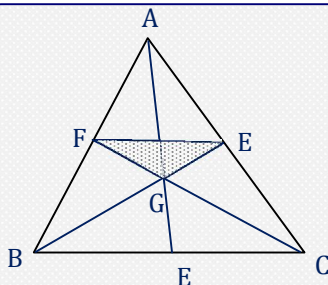
حل : گزینه (۳) .



$$AH \cdot BC = BD \cdot AC \Rightarrow 6 \times BC = 8 \times 9 \Rightarrow BC = 12$$



در شکل مقابل G مرکز ثقل مثلث است و داریم :



$$\begin{aligned} S_{EFG} &= s \\ S_{ABC} &= 12s \\ S_{BGC} &= 4s \\ S_{AEF} &= 3s \\ S_{ECG} &= S_{FGB} = 2s \end{aligned}$$



در شکل مقابل O نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی مثلث است و داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{a+b+c} = \frac{S_{OBC}}{a} = \frac{S_{OAC}}{b} = \frac{S_{OAB}}{c}$$


هرگاه اوساط سه ضلع مثلثی را متوالیاً به هم وصل کنیم، مساحت چهار مثلث ایجاد شده باهم برابرند.



در شکل مقابل داریم:

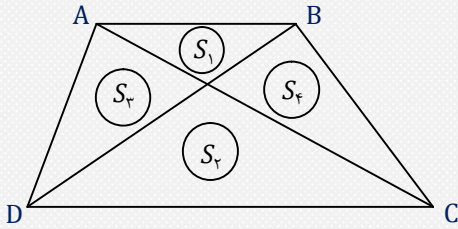
$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{xzm + ytn}{abc}$$


E نقطه‌ی دلخواهی درون متوازی‌الاضلاع ABCD است و داریم:

$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$



چهارضلعی ABCD دوزنقه است و داریم:



$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 \quad \text{و} \quad S_2 = S_4$$

<table border="1"> <tr><td>8</td><td>27</td></tr> <tr><td>54</td><td>24</td></tr> </table>	8	27	54	24	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>21</td></tr> <tr><td>42</td><td>18</td></tr> </table>	6	21	42	18
8	27								
54	24								
6	21								
42	18								
<table border="1"> <tr><td>9</td><td>30</td></tr> <tr><td>60</td><td>27</td></tr> </table>	9	30	60	27	<table border="1"> <tr><td>5</td><td>? a</td></tr> <tr><td>? b</td><td>? c</td></tr> </table>	5	? a	? b	? c
9	30								
60	27								
5	? a								
? b	? c								

Solving equation by

$$\frac{1}{n} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{n} \sin x =$$

$$six = 6$$