

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تعداد صفحه: ۱	تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۶/۶	دوره پیش دانشگاهی	نام و نام خانوادگی:
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزادسراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۵		

ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	در بازه متقارن $(2, 8)$ ، نقطه میانی و شعاع بازه را بیابید.	۱
۱	به روش $\epsilon$ ثابت کنید دنباله $\left\{ \frac{6n+1}{2n} \right\}_{n=1}$ به عدد ۳ همگراست.	۲
۱	با استفاده از قضیه بولزانو ثابت کنید معادله $-x^2 - 2x^3 + 1 = 0$ در بازه $[0, 1]$ جواب دارد.	۳
۱	مجانب مایل نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x + 1}$ را در صورت وجود بیابید.	۴
۱	آهنگ تغییر حجم کره ای به شعاع $r$ را نسبت به $r$ وقتی که $r = 3$ است بیابید.	۵
۱	تابع $f$ در نقطه $a$ پیوسته است ثابت کنید تابع $g(x) = (x-a)f(x)$ در نقطه $a$ مشتق پذیر است.	۶
۰/۷۵	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید: الف) اگر تابع $f$ در $a$ مشتق پذیر باشد آنگاه در $a$ پیوسته است. ب) نقطه $x = 0$ یک نقطه گوشه برای تابع $f(x) =  x $ است. ج) اگر تابع $f$ زوج و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش نیز زوج است.	۷
۱/۵	از نقطه $A(4, 8)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 - x$ رسم شده است. معادلات این دو خط مماس را بیابید.	۸
۱/۷۵	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = \ln  \sin 2x $ ب) $x^3 + y^5 - 3x^2y = 0$	۹
۱	فرض کنید $f(x) = x^2 - 8$ ، مقدار $(f^{-1})'$ را در صورت وجود، بیابید.	۱۰
۱/۵	مجموع دو عدد مثبت برابر ۲ است، بزرگترین مقدار ممکن برای حاصلضرب آن‌ها را پیدا کنید.	۱۱
۱/۵	در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a, b, c$ را طوری بیابید که نقطه $(1, -1)$ مینیمم نسبی آن باشد و منحنی تابع از نقطه $(2, 2)$ بگذرد.	۱۲
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $y = x^3 - 3x$ را رسم کنید.	۱۳
۱/۵	با استفاده از افرازهای مناسب، مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله $y = 3x + 1$ بوده و محدود به خطوط $x = 0$ و $x = 2$ می باشد.	۱۴
۱	بدون محاسبه انتگرال، کران بالا و پایینی برای $\int_0^2 (x^2 - 3x^2 + 1) dx$ بیابید.	۱۵
۱/۵	انتگرال های معین و نامعین زیر را بیابید. الف) $\int (e^{3x} + x^5) dx$ ب) $\int_0^{\pi} \cos x dx$	۱۶
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۶/۶	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۵	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	$x_0 = \frac{8+2}{2} = 5 \quad (0/5)$	$\delta = \frac{8-2}{2} = 3 \quad (0/5)$	۱
۱	$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n \geq M  a_n - L  < \varepsilon \rightarrow \left  \frac{6n+1}{2n} - 3 \right  < \varepsilon \quad (0/25)$ $\rightarrow \left  \frac{1}{2n} \right  < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad (0/25) \quad n > \frac{1}{2\varepsilon} \quad (0/25) \Rightarrow M = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad (0/25)$		۲
۱	<p>تابع <math>f(x) = -x^2 - 2x^2 + 1</math> چندجمله ای است پس در هر نقطه از <math>\mathbb{R}</math> پیوسته است پس در بازه <math>[0, 1]</math> نیز، پیوسته است. <math>(0/25)</math> از طرفی <math>f(0) = 1, f(1) = -2</math> پس داریم <math>f(0) \times f(1) &lt; 0</math> بنابراین طبق قضیه بولزانو دست کم عددی مانند <math>c</math> در بازه <math>(0, 1)</math> وجود دارد به طوری که <math>f(c) = 0</math> یعنی <math>c</math> ریشه ی معادله ی <math>-x^2 - 2x^2 + 1 = 0</math> است. <math>(0/25)</math></p>		۳
۱	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 4}{x + 1} = \pm\infty$ چون درجه صورت فقط یک واحد از درجه مخرج بزرگتر است پس این تابع گویادارای مجانب مایل است $(0/25)$ $\frac{2x^2 - x + 4}{x + 1} = \frac{2x^2 - 2x}{2x - 3} + \frac{3x + 3}{2x - 3}$ <p>پس <math>y = 2x - 3</math> معادله مجانب مایل این تابع گویاست. <math>(0/75)</math></p>		۴
۱	$v = \frac{4}{3} \pi r^2 \quad (0/25)$	$v' = 4\pi r^2 \quad (0/25) \Rightarrow v'(3) = 36\pi \quad (0/5)$	۵
۱	$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (0/25) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f(x) - 0}{x-a} \quad (0/25) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ چون $f$ در $a$ پیوسته است پس $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ و موجود است $(0/25)$ پس $g$ در $a$ مشتق پذیر است. $(0/25)$		۶
۰/۷۵	درست (الف) $(0/25)$	درست (ب) $(0/25)$	نادرست (ج) $(0/25)$

ادامه در برگه ی دوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۶/۶	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۵	
ردیف	راهنمای تصحیح	
نمره		

۱/۵	<p>فرض کنیم <math>M(\alpha, \alpha^2 - \alpha)</math> نقطه مطلوب باشد (۰/۲۵) ابتدا معادله خط مماس بر منحنی در نقطه <math>M</math> را به دست می آوریم:</p> $f'(x) = 2x - 1 \rightarrow m = f'(\alpha) = 2\alpha - 1 \quad (۰/۲۵)$ <p>خط مماس از نقطه <math>(4, 8)</math> می گذرد بنابراین:</p> $8 - \alpha^2 + \alpha = (2\alpha - 1)(4 - \alpha) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 12 = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \rightarrow y = 3x - 4 \quad (۰/۲۵) \\ \alpha = 6 \rightarrow y = 11x - 36 \quad (۰/۲۵) \end{cases}$ <p>معادلات خطوط مماس:</p>	۸
۱/۷۵	<p>الف) <math>y = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} \quad (۰/۵)</math>      ب) <math>y' = -\frac{3x^2 - 6xy}{5y^2 - 3x^2} \quad (۱)</math></p>	۹
۱	<p><math>b = 0 \rightarrow x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = 2 = a \quad (۰/۲۵)</math>      <math>f'(x) = 3x^2 \quad (۰/۲۵)</math></p> $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)} \quad (۰/۲۵) = \frac{1}{12} \quad (۰/۲۵)$	۱۰
۱/۵	<p><math>x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x \quad (۰/۲۵)</math>      <math>p = x \times y = x(20 - x) = -x^2 + 20x \quad (۰/۲۵)</math></p> $p' = -2x + 20 \quad (۰/۲۵) \quad -2x + 20 = 0 \rightarrow x = 10 \quad (۰/۲۵) \quad y = 20 - x \rightarrow y = 10 \quad (۰/۲۵)$ $p = x \times y \rightarrow p = 10 \times 10 = 100 \quad (۰/۲۵)$	۱۱
۱/۵	$\left. \begin{aligned} f(1) = -1 \rightarrow a + b + c = -1 \quad (۰/۲۵) \\ f(2) = 2 \rightarrow 4a + 2b + c = 2 \quad (۰/۲۵) \\ f'(x) = 2ax + b \xrightarrow{f'(1)=0} 2a + b = 0 \quad (۰/۲۵) \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 3 \quad (۰/۲۵) \quad b = -6 \quad (۰/۲۵) \quad c = 2 \quad (۰/۲۵)$	۱۲
۲	<p><math>D = \mathbb{R} \quad (۰/۲۵)</math></p> $y' = 3x^2 - 3 \quad 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1 \quad (۰/۲۵), \quad x = -1 \quad (۰/۲۵)$ $y'' = 6x \quad 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0) \quad (۰/۲۵)$ <p>نقطه عطف</p> <p>(ادامه جواب در صفحه بعد)</p>	۱۳

ادامه در برگه ی سوم

مدت امتحان: ۱۵۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۵ / ۶ / ۶	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۵	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-1</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>y'</math></td> <td><math>+</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>-</math></td> <td><math>+</math></td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>\nearrow</math></td> <td><math>2</math></td> <td><math>\searrow</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </table> <p>(۰/۵)</p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	$y'$	$+$	$0$	$-$	$+$	$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$+\infty$	<p>(۰/۵)</p>
$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$													
$y'$	$+$	$0$	$-$	$+$													
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$+\infty$												

<p>بازه ی <math>[0, 2]</math> را به <math>n</math> بازه ی جزء با طول مساوی تقسیم می کنیم:</p> $x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{2n}{n} = 2 \rightarrow$ $x_i = \frac{2i}{n} \rightarrow f(x_i) = 3 \times \frac{2i}{n} + 1 \quad (0/25), \Delta x_i = \frac{2}{n} \quad (0/25)$ $\rightarrow S_n = \sum_{i=1}^n (3 \times \frac{2i}{n} + 1) \times \frac{2}{n} \quad (0/25) = \frac{12}{n^2} \times \sum_{i=1}^n i + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{12}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n} \times n \rightarrow$ $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 8 \quad (0/25)$	<p>۱۴</p>
--	-----------

<p>طول نقطه بحرانی</p> $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad f'(x) = 3x^2 - 6x \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 2$ <p>پس تابع <math>f</math> در بازه <math>[1, 3]</math> دارای ماکسیمم مطلق <math>M = 1</math> و مینیمم مطلق <math>m = -3</math> است. (۰/۵)</p> <p>کران بالا <math>= M(b-a) = 1 \times (3-1) = 2 \quad (0/25)</math></p> <p>کران پایین <math>= m(b-a) = -3 \times (3-1) = -6 \quad (0/25)</math></p>	<p>۱۵</p>
--	-----------

<p>الف) <math>\int e^{rx} dx + \int x^6 dx = \frac{1}{r} e^{rx} + \frac{x^7}{7} + c \quad (0/75)</math></p> <p>ب) <math>\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big _0^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \quad (0/25) = 1 - 0 = 1 \quad (0/25)</math></p>	<p>۱۶</p>
--	-----------

۲۰ همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر